武汉大学

惯性导航算法
INS Algorithm

牛小骥 陈起金

武汉大学卫星导航定位技术研究中心
(GNSS Center of Wuhan University)

2019年11月

目 录

预备知识

- 向量的表示
  - b，载体坐标系
  - r，参考坐标系
  - p，投影坐标系

$$\boldsymbol{v}_{rb}^{p}$$

思考

角增量$\Delta\boldsymbol{\theta}^b$是向量吗？

$$\Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_k)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_f^b(t_k)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

- 向量的投影变换

$$\boldsymbol{v}^R=\mathbf{C}_a^R\boldsymbol{v}^a$$

- 角速度

$$\boldsymbol{\omega}_{in}=\boldsymbol{\omega}_{ie}+\boldsymbol{\omega}_{en}$$

- 地球表面导航所关心的：
  - 位置：地心→载体
  - 速度：地速
  - 姿态：b系相对于n系（或e系）

预备知识 – 反对称矩阵

- 向量积

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z}\end{vmatrix}=(\boldsymbol{v}\times)\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}0 & -v_z & v_y\\ v_z & 0 & -v_x\\ -v_y & v_x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1x}\\ v_{1y}\\ v_{1z}\end{bmatrix}$$

- 反对称矩阵的幂方

$$(\boldsymbol{v}\times)^n=\begin{cases}(-1)^{(n-1)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-1}(\boldsymbol{v}\times) & n=1,3,5,\ldots\\ (-1)^{(n-2)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-2}(\boldsymbol{v}\times)^2 & n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

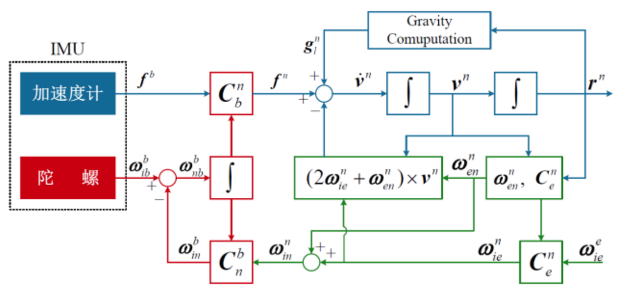
$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}v_x & v_y & v_z\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}v_{1x} & v_{1y} & v_{1z}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

- 反对称矩阵的矩阵指数函数

$$e^{(\boldsymbol{v}\times)}=\mathbf{I}_{3\times3}+\frac{\sin|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}(\boldsymbol{v}\times)+\frac{1-\cos|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|^2}(\boldsymbol{v}\times)^2$$

INS机械编排

捷联惯导利用陀螺的原始测量值计算载体姿态矩阵，通过姿态矩阵把加速度计测量的载体的沿载体坐标系轴向的比力信息转换到特定的坐标系中（如导航坐标系），然后进行导航解算。



姿态表达式

- 姿态及其作用
  - 姿态（attitude）描述的是一个坐标系的轴系相对于另一个坐标系的轴系之间的角度关系（方向）
  - 坐标系可以看成刚体，而姿态是描述刚体的六参数（三个坐标和三个轴向角度）中的三个。描述姿态需要三个独立参数
  - 在惯性导航中，姿态主要用于比力、角速度及其它向量的投影变换（例如从载体坐标系变换到导航坐标系）

姿态表达式

- 姿态表达式及其更新
  - 欧拉角法（Euler Angles）
  - 方向余弦矩阵法（Direction Cosine Matrix）
  - 四元数法（Quaternion）
  - 等效旋转矢量法（Rotation Vector）

欧拉角法

- 欧拉&欧拉方程

Gauss is reported to have commented that if this formula was not immediately obvious, the reader would never be a first-class mathematician (Derbyshire 2004, p. 202).

$$e^{i\pi}+1=0$$

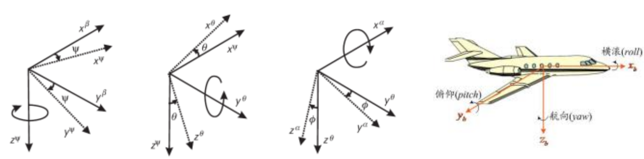
- 欧拉旋转定理

Euler's theorem (1776) The general displacement of a rigid body with one point fixed is a rotation about some axis. (Goldstein 1980)

- 欧拉角

欧拉角法

在三维欧氏空间里，任何两个正交坐标系都可以用坐标变换把它们联系起来，而坐标变换又可以用坐标旋转来得到。一个动坐标系相对参考坐标系的方位，可以完全由动坐标系一次绕三个不同的转轴的转角来确定。如，可把载体坐标系（b系）作为动坐标系，导航坐标系（NED）作为参考坐标系，则航向角、俯仰角和横滚角则为一组欧拉角。



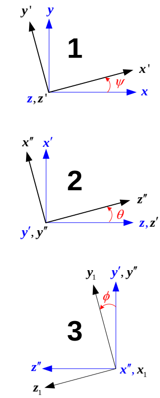
欧拉角法

- 用欧拉角表示坐标转换矩阵

Rotation 1
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Rotation 2
$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Rotation 3
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{r}^{b_1} = \mathbf{C}_\phi \mathbf{C}_\theta \mathbf{C}_\psi \boldsymbol{r}^b = \mathbf{C}_b^{b_1} \boldsymbol{r}^b$$

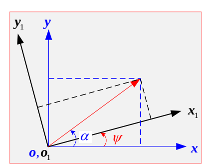
$$\mathbf{C}_{b_1}^b = \left(\mathbf{C}_b^{b_1}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

s = sin; c = cos

欧拉角法

- 坐标变换

任意向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $b(oxy)$ 和 $b_1(o_1x_1y_1)$ 下的投影（即坐标值）表示为 $\boldsymbol{r}^b = [x,\ y]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{r}^{b_1} = [x_1,\ y_1]^{\mathrm{T}}$



$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha$$
$$x_1 = r\cos(\alpha - \psi),\quad y_1 = r\sin(\alpha - \psi)$$

$$x_1 = r\cos\alpha\cos\psi + r\sin\alpha\sin\psi = x\cos\psi + y\sin\psi$$
$$y_1 = r\sin\alpha\cos\psi - r\cos\alpha\sin\psi = -x\sin\psi + y\cos\psi$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

欧拉角法

- 微分方程

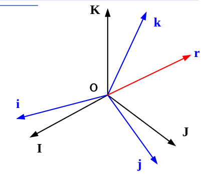
$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta \\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{nb,x}^b \\ \omega_{nb,y}^b \\ \omega_{nb,z}^b \end{bmatrix}$$

- 欧拉角法优缺点
  - 优点：求解欧拉角微分方程即可得到三个姿态角，且由欧拉角得到的姿态矩阵永远是正交阵
  - 缺点：当俯仰为±90度时，方程式出现“奇点”，不能用在全姿态飞行器上。
  - 欧拉角法较少直接用于姿态更新

方向余弦矩阵

□ 方向余弦

$$\cos(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)=\frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1|\cdot|\boldsymbol{v}_2|}$$



已知：$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$为$b$系$x, y, z$轴的单位向量，$\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$为$R$系$x, y, z$轴上的单位向量。

$$\boldsymbol{i}^b=[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{j}^b=[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{k}^b=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{I}^R=[1\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{J}^R=[0\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{K}^R=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

求向量 $\boldsymbol{i}$ 在R系下的投影表达式，即 $\boldsymbol{i}^R=\begin{bmatrix} i_x^R & i_y^R & i_z^R\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=?$

方向余弦矩阵

□ 方向余弦矩阵

$$i_x^R=|\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{i}|\cos(\boldsymbol{I},\boldsymbol{i})=\cos(\boldsymbol{I},\boldsymbol{i})=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{i}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{i}^R & \boldsymbol{j}^R & \boldsymbol{k}^R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\boldsymbol{I},\boldsymbol{i}) & \cos(\boldsymbol{I},\boldsymbol{j}) & \cos(\boldsymbol{I},\boldsymbol{k})\\ \cos(\boldsymbol{J},\boldsymbol{i}) & \cos(\boldsymbol{J},\boldsymbol{j}) & \cos(\boldsymbol{J},\boldsymbol{k})\\ \cos(\boldsymbol{K},\boldsymbol{i}) & \cos(\boldsymbol{K},\boldsymbol{j}) & \cos(\boldsymbol{K},\boldsymbol{k})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}^R=\begin{bmatrix}r_x^R\\ r_y^R\\ r_z^R\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{i} & \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{j} & \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_x^b\\ r_y^b\\ r_z^b\end{bmatrix}=\mathbf{C}_b^R\boldsymbol{r}^b$$

- 理解方向余弦矩阵中“方向余弦”的含义（坐标轴夹角的余弦）
- 方向余弦矩阵（Direction Cosine Matrix，DCM）又被称为“坐标转换矩阵”，常用于将矢量的投影从一个坐标系变换到另一坐标系中。

方向余弦矩阵

□ 方向余弦矩阵的特性

- 方向余弦矩阵为正交矩阵（方块矩阵的行与列皆为相互正交的单位向量）

$$\mathbf{C}_b^a=\left(\mathbf{C}_a^b\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\left(\mathbf{C}_b^a\right)^{-1}=\left(\mathbf{C}_b^a\right)^{\mathrm{T}}$$
$$\det\left(\mathbf{C}_b^a\right)=1$$

- 连乘运算

$$\mathbf{C}_d^a=\mathbf{C}_b^a\mathbf{C}_d^b$$

- 向量投影变换

$$\boldsymbol{v}^b=\mathbf{C}_a^b\boldsymbol{v}^a$$

方向余弦矩阵

□ 欧拉角为小角度时的DCM

当三个欧拉角均为小角度时（小角度近似），对应的方向余弦矩阵可简化为：

$$\mathbf{C}_y^x=\begin{bmatrix}1 & -\psi_{xy} & \theta_{xy}\\ \psi_{xy} & 1 & -\phi_{xy}\\ -\theta_{xy} & \phi_{xy} & 1\end{bmatrix}=\mathbf{I}+(\boldsymbol{v}\times),\quad \boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\phi_{xy}\\ \theta_{xy}\\ \psi_{xy}\end{bmatrix}$$

思考：

$$\mathbf{C}_{b(t_{k-1})}^{b(t_k)}=\mathbf{I}-\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)}\times\right)$$
$$\mathbf{C}_{b(t_k)}^{b(t_{k-1})}=\mathbf{I}+\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)}\times\right)$$

注意：从哪个坐标系转动到哪个坐标系；vs 相对于

*Tips: $\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)}=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\,dt$，$\mathbf{C}_y^x=\begin{pmatrix}c\theta c\psi & -c\phi s\psi+s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi+c\phi s\theta c\psi\\ c\theta s\psi & c\phi c\psi+s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi+c\phi s\theta s\psi\\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta\end{pmatrix}$

方向余弦矩阵的微分方程

已知坐标系R，b，求$\dot{\mathbf{C}}_b^R$

1）由定义：$\dot{\mathbf{C}}_b^R = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{C}_b^R(t+\Delta t) - \mathbf{C}_b^R(t)}{\Delta t}$

2）DCM：

$$\mathbf{C}_b^R(t+\Delta t) = \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{R(t+\Delta t)} = \mathbf{C}_{R(t)}^{R(t+\Delta t)} \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)} \mathbf{C}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$$

$$= \left[\mathbf{I} - \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{R(t)R(t+\Delta t)}^{R(t)} \times\right)\right] \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)} \left[\mathbf{I} + \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)} \times\right)\right]$$

忽略二阶小量 $\approx \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)} + \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)} \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)} \times\right) - \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{R(t)R(t+\Delta t)}^{R(t)} \times\right) \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)}$

3）带入得：

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)} \left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t)b(t+\Delta t)}^{b(t)} \times\right)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{R(t)R(t+\Delta t)}^{R(t)} \times\right) \mathbf{C}_{b(t)}^{R(t)}}{\Delta t}$$

$$= \mathbf{C}_b^R(t)\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)\times\right) - \left(\boldsymbol{\omega}_{iR}^R(t)\times\right)\mathbf{C}_b^R(t)$$

$$= \mathbf{C}_b^R\left(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times\right)$$

*Tips $\left(\boldsymbol{v}^R \times\right) = \mathbf{C}_b^R \left(\boldsymbol{v}^b \times\right) \mathbf{C}_R^b$

DCM微分方程求解

- 求解微分方程 $\dot{\mathbf{C}}_b^R = \mathbf{C}_b^R\left(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \times\right)$
  - 时变系数齐次微分方程；毕卡（Peano-Baker）逼近法求解

$$\mathbf{C}_b^R(t) = \mathbf{C}_b^R(0) + \int_0^t \mathbf{C}_b^R(\tau)\Omega(\tau)d\tau$$

记 $\Omega(t) = \left[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\times\right]$

$$\mathbf{C}_b^R(t) = \mathbf{C}_b^R(0)\Big[\mathbf{I} + \int_0^t \Omega(\tau)d\tau + \int_0^t\int_0^\tau \Omega(\tau_1)d\tau_1\Omega(\tau)d\tau$$
$$+ \int_0^t\int_0^\tau\int_0^{\tau_1} \Omega(\tau_2)d\tau_2\Omega(\tau_1)d\tau_1\Omega(\tau)d\tau + \cdots\Big]$$

  - 级数收敛，若更新区间内$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b$的方向保持不变，可得闭合解

$$\mathbf{C}_b^R(t) = \mathbf{C}_b^R(0)e^{\int_0^t\left[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(\tau)\times\right]d\tau}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(\tau)d\tau \qquad \left[\Delta\boldsymbol{\theta}\times\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_z & \Delta\theta_y \\ \Delta\theta_z & 0 & -\Delta\theta_x \\ -\Delta\theta_y & \Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ref： Titterton, D. and J. L. Weston (2004). Strapdown inertial navigation technology, IET.

DCM微分方程求解

条件：积分周期内，b系定轴转动

$$\exp\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\times\right]dt\right\}$$
$$= \mathbf{I} + [\Delta\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2}{2!} + \frac{[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^3}{3!} + \cdots$$
$$= \mathbf{I} + \left[1 - \frac{\Delta\theta^2}{3!} + \frac{\Delta\theta^4}{5!} - \cdots\right][\Delta\boldsymbol{\theta}\times] + \left[\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{4!} + \frac{\Delta\theta^4}{6!} - \cdots\right][\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2$$
$$= \mathbf{I} + \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2$$

$$\mathbf{C}_b^R(t_k) = \mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\left[\mathbf{I} + \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$ DCM更新方程

*Tips

$$e^{(\boldsymbol{v}\times)} = \mathbf{I}_{3\times3} + \frac{\sin|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}(\boldsymbol{v}\times) + \frac{1-\cos|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|^2}(\boldsymbol{v}\times)^2 \qquad |\Delta\boldsymbol{\theta}| = \sqrt{\Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2}$$

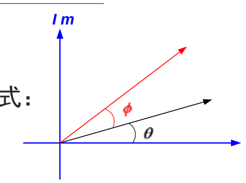
$$(\boldsymbol{v}\times)^n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-1}(\boldsymbol{v}\times) & n = 1,3,5,\ldots \\ (-1)^{(n-2)/2}|\boldsymbol{v}|^{n-2}(\boldsymbol{v}\times)^2 & n = 2,4,6,\ldots \end{cases} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \ x \in R$$

姿态四元数

*Tips $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

- 复平面的向量旋转（例）
  - 复数 $z=x+yi$ 可写成等价形式：

$$z = pe^{i\theta}$$



  - 复数$e^{i\phi}$乘以复数 $z = pe^{i\theta}$（复平面内的二维向量）：

$$w = e^{i\phi}z = e^{i\phi}pe^{i\theta} = pe^{i(\theta+\phi)}$$

上述运算相当于将z表示的平面向量旋转了一个角度ϕ 。类似地，特定形式的复数（如四元数）也可用来表示三维空间的旋转。

姿态四元数

□ 四元数

在将三维矢量代数推广至乘法和除法运算的研究中，爱尔兰数学家、物理学家哈密顿于1843年创建了四元数（quaternion）和四元数代数。

$$\boldsymbol{q} = q_0 1 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

Broom Bridge plaque in Dublin

William Rowan Hamilton (1805–1865)

姿态四元数

□ 四元数的基本概念

四元数，是指有一个实数单位1和三个虚数单位$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$组成并具有下列形式实元的数。

$$\boldsymbol{q} = (q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3) = q_0 1 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = q_0 + \boldsymbol{q}_v$$

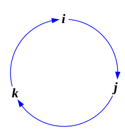
单位1，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$可以看作四维空间（用符号H来表示）中的单位矢。任何四元数都可用点或矢径在该空间中表示出来。空间H对乘法和除法运算是封闭的。

$$\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{i} = -1,\quad \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{j} = -1,\quad \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{k} = -1,$$

$$\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{i}\otimes\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{j}\otimes\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\otimes\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$1\otimes\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\otimes 1 = \boldsymbol{i},\quad 1\otimes\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\otimes 1 = \boldsymbol{j},\quad 1\otimes\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\otimes 1 = \boldsymbol{k},\quad 1\otimes 1 = 1$$



姿态四元数

*Tips $\boldsymbol{p} = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$

□ 四元数代数

- **相等**：两个四元数诸元对应相等

$$p_0 = q_0,\quad p_1 = q_1,\quad p_2 = q_2,\quad p_3 = q_3$$

- **加法**：两个四元数诸元对应相加

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\pm\boldsymbol{q} &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) \pm (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ &= (p_0 \pm q_0) + (p_1 \pm q_1)\boldsymbol{i} + (p_2 \pm q_2)\boldsymbol{j} + (p_3 \pm q_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

- **数乘**：四元数乘以标量a等于诸元均乘该数

$$a\boldsymbol{q} = aq_0 1 + aq_1\boldsymbol{i} + aq_2\boldsymbol{j} + aq_3\boldsymbol{k}$$

- 四元数加法及同标量的乘法都服从于一般代数规则

$$\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p},\quad (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{p} + (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{\lambda})$$

$$a\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}a,\quad (ab)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(ba)$$

$$(a+b)\boldsymbol{q} = a\boldsymbol{q} + b\boldsymbol{q},\quad a(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) = a\boldsymbol{p} + a\boldsymbol{q}$$

姿态四元数

□ 四元数代数

- 乘法

$$\boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{q}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q} &= (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) \otimes (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\boldsymbol{j} + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q} &= (p_0 + \boldsymbol{p}_v) \otimes (q_0 + \boldsymbol{q}_v) = p_0q_0 + p_0\boldsymbol{q}_v + q_0\boldsymbol{p}_v + \boldsymbol{p}_v \otimes \boldsymbol{q}_v \\ &= (p_0q_0 - \boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v) + (q_0\boldsymbol{p}_v + p_0\boldsymbol{q}_v + \boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{q}_v)\end{aligned}$$

向量形式

$$\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

矩阵形式

姿态四元数

*Tips: sqal(q) = 四元数q的标量部分
vect(q) = 四元数q的矢量部分

- 四元数代数
  - 乘法性质
    - 四元数乘法不满足交换律

$$\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\neq\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p}$$

思考
什么情况下满足交换律

    - 四元数乘法满足结合律和对加法的分配律

$$(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})\otimes\Lambda=\boldsymbol{p}\otimes(\boldsymbol{q}\otimes\Lambda)$$

$$\boldsymbol{p}\otimes(\boldsymbol{q}+\Lambda)=\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}+\boldsymbol{p}\otimes\Lambda$$

    - 四元数乘法因子循环置换时，乘积的标量部分不变

$$\mathrm{sqal}(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})=\mathrm{sqal}(\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{p})$$

$$\mathrm{sqal}(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\otimes\Lambda)=\mathrm{sqal}(\boldsymbol{q}\otimes\Lambda\otimes\boldsymbol{p})=\mathrm{sqal}(\Lambda\otimes\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})$$

姿态四元数

*Tips

$$\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}=p_0q_0+\boldsymbol{p}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v+q_0\boldsymbol{p}_v+p_0\boldsymbol{q}_v+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\p_1&p_2&p_3\\q_1&q_2&q_3\end{vmatrix}$$

- 四元数代数
  - 共轭四元数 $\boldsymbol{q}^*=q_0-\boldsymbol{q}_v$

$$\boldsymbol{q}^*=q_0-q_1\boldsymbol{i}-q_2\boldsymbol{j}-q_3\boldsymbol{k}$$

    - 性质

$$(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})^*=\boldsymbol{p}^*+\boldsymbol{q}^*$$

$$\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}^*\otimes\boldsymbol{q}$$

$$(\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q})^*=\boldsymbol{q}^*\otimes\boldsymbol{p}^*$$

$$(\boldsymbol{q}_1\otimes\boldsymbol{q}_2\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{q}_n)^*=\boldsymbol{q}_n^*\otimes\boldsymbol{q}_{n-1}^*\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{q}_1^*$$

    - 四元数与其共轭四元数的乘积为该四元数的范数

$$\|\boldsymbol{q}\|=\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}^*=\boldsymbol{q}^*\otimes\boldsymbol{q}=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2$$

$$\|\boldsymbol{q}_1\otimes\boldsymbol{q}_2\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{q}_n\|=\|\boldsymbol{q}_1\|\|\boldsymbol{q}_2\|\cdots\|\boldsymbol{q}_n\|$$

姿态四元数

$$\Lambda=\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{q}\Rightarrow\begin{array}{l}\lambda_0=p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3\\\lambda_1=p_0q_1+p_1q_0+p_2q_3-p_3q_2\\\lambda_2=p_0q_2+p_2q_0+p_3q_1-p_1q_3\\\lambda_3=p_0q_3+p_3q_0+p_1q_2-p_2q_1\end{array}$$

- 四元数代数
  - 四元数的逆：记作 $\boldsymbol{q}^{-1}$，满足 $\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}^{-1}\otimes\boldsymbol{q}=1$

$$\boldsymbol{q}^{-1}=\frac{\boldsymbol{q}^*}{\|\boldsymbol{q}\|}$$

    - 性质

$$(\boldsymbol{q}_1\otimes\boldsymbol{q}_2\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{q}_n)^{-1}=\boldsymbol{q}_n^{-1}\otimes\boldsymbol{q}_{n-1}^{-1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{q}_1^{-1}$$

  - 规范化四元数：模等于1的四元数

归一化 $\boldsymbol{q}=\hat{\boldsymbol{q}}/|\hat{\boldsymbol{q}}|,\quad \|\hat{\boldsymbol{q}}\|\neq 0$

对规范化四元数有： $\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}^*$

姿态四元数

- 四元数的旋转变换/算子

定理：对于任意单位四元数（范数为1）

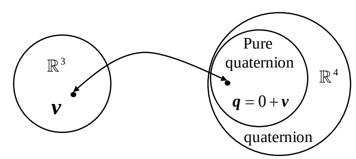
$$\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v=\cos(\theta/2)+\boldsymbol{u}\sin(\theta/2)$$

对于任意三维向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^3$，算子

$$L_q(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{q}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{q}^*$$

注意不是θ/2 !!

的作用等效于使向量v绕向量u的正方向旋转角度θ。



四元数的三角函数形式

$$\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v=q_0 1+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}$$

$$\cos\phi=q_0/|\boldsymbol{q}|$$

$$\sin\phi=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}/|\boldsymbol{q}|$$

$$\boldsymbol{q}=\cos(\theta/2)+\boldsymbol{u}\sin(\theta/2)$$

姿态四元数

$$q = q_0 + \boldsymbol{q}_v = \cos(\theta/2) + \boldsymbol{u}\sin(\theta/2)$$

证明：将矢量v分解为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{n}$，其中a是与u共线的部分 $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{q}_v$，n是与u垂直的部分。

① 证明 $L_q(\cdot)$ 算子不会改变a的方向和长度

$$L_q(\boldsymbol{a}) = \left(q_0^2 - |\boldsymbol{q}_v|^2\right)k\boldsymbol{q}_v + 2\left(k\boldsymbol{q}_v \cdot \boldsymbol{q}_v\right)\boldsymbol{q}_v + 2q_0\left(\boldsymbol{q}_v \times k\boldsymbol{q}_v\right)$$

$$= k\left(q_0^2 - |\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{q}_v + 2k|\boldsymbol{q}_v|^2\boldsymbol{q}_v = \left(q_0^2 + \boldsymbol{q}_v^2\right)k\boldsymbol{q}_v = \boldsymbol{a}$$

② 计算 $L_q(\cdot)$ 算子对n的作用

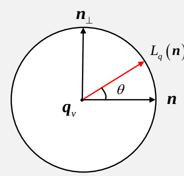
$$L_q(\boldsymbol{n}) = \left(q_0^2 - |\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{n} + 2\left(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q}_v\right)\boldsymbol{q}_v + 2q_0\left(\boldsymbol{q}_v \times \boldsymbol{n}\right)$$

$$= \left(q_0^2 - |\boldsymbol{q}_v|^2\right)\boldsymbol{n} + 2q_0|\boldsymbol{q}_v|\left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\right)$$

$$L_q(\boldsymbol{n}) = \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n} + 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\right)$$

$$= \cos\theta\,\boldsymbol{n} + \sin\theta\left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}\right)$$

$$= \cos\theta\,\boldsymbol{n} + \sin\theta\,\boldsymbol{n}_\perp$$

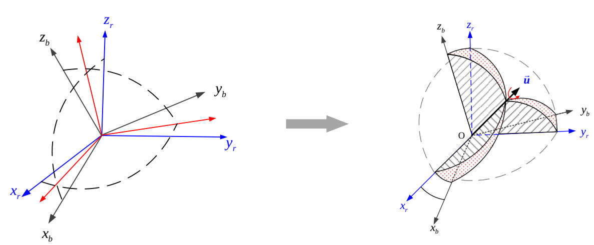


结论：算子 $L_q(\cdot)$ 对向量n的作用等效于在 n 和 $n_\perp$ 定义的平面内旋转 θ 角，转轴为 $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|) \times \boldsymbol{n}_\perp$，即 q_v 方向。

姿态四元数

□ 欧拉旋转定理 – 坐标系的等效转动

动坐标系相对于参考坐标系的方位，等效于动坐标系绕某一个固定轴（$\boldsymbol{u}$）转动一个角度θ。



三次连续转动　　一次转动

Ref：袁信，郑谔（1985）. 捷联惯性导航系统原理，北京：航空工业出版社.

姿态四元数

□ 姿态四元数

$\boldsymbol{u}$表示欧拉轴向的单位向量，则b系相对于R系的姿态完全可由$\boldsymbol{u}$和转动角度θ两个参数来确定。用$\boldsymbol{u}$和θ两个参数可以构造一个四元数

$$\boldsymbol{q}_b^R = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{u}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$q_b^R = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ u_x\sin(\theta/2) \\ u_y\sin(\theta/2) \\ u_z\sin(\theta/2) \end{bmatrix}, \quad \left\|q_b^R\right\| = 1$$

参考坐标系R绕$\boldsymbol{u}$转动一个角度θ（注意不是$\theta/2$）后与动坐标系b重合。注意姿态四元数上下标的含义。

Ref： Titterton, D. and J. L. Weston (2004). Strapdown inertial navigation technology, IET.

姿态四元数

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

□ 四元素微分方程

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{q}_b^R(t+\Delta t) - \boldsymbol{q}_b^R(t)}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{q}_b^R(t+\Delta t) = \boldsymbol{q}_{b(t+\Delta t)}^{R(t+\Delta t)} = \boldsymbol{q}_{R(t)}^{R(t+\Delta t)} \otimes \boldsymbol{q}_{b(t)}^{R(t)} \otimes \boldsymbol{q}_{b(t+\Delta t)}^{b(t)}$$

$$= \boldsymbol{q}_{b(t)}^{R(t)} \otimes \left(\cos\frac{\Delta\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$\approx \boldsymbol{q}_{b(t)}^{R(t)} \otimes \left(1 + \boldsymbol{n}\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$\dot{\boldsymbol{q}}_b^R = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\boldsymbol{q}_{b(t)}^{R(t)} \otimes \boldsymbol{n}\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_b^R \otimes \omega_{Rb}^b$$

$$= \frac{1}{2}q_b^R \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}$$

写成矩阵形式

姿态四元数更新

和方向余弦矩阵微分方程类似，可用毕卡逼近法求解姿态四元数微分方程。如果角速度向量的方向在更新周期内保持不变（定轴转动），可得四元数微分方程的闭合解：

$$\boldsymbol{q}_b^R(t_{k+1}) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{W}\,dt\right\}\boldsymbol{q}_b^R(t_k) \qquad \text{定轴转动时的特解}$$

$$\Delta\Theta = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \boldsymbol{W}\,dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{Rb,x}^b & -\omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b \\ \omega_{Rb,x}^b & 0 & \omega_{Rb,z}^b & -\omega_{Rb,y}^b \\ \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,z}^b & 0 & \omega_{Rb,x}^b \\ \omega_{Rb,z}^b & \omega_{Rb,y}^b & -\omega_{Rb,x}^b & 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}^{\frac{\Delta\Theta}{2}} = \mathbf{I}_{4\times4}\cos\frac{\Delta\theta}{2} + \frac{\Delta\Theta}{\Delta\theta}\sin\frac{\Delta\theta}{2}$$

*Tips $\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{W}\boldsymbol{q}$

四元数,DCM姿态更新的问题

方向余弦矩阵和四元数更新姿态时，其精度均会受到以下两个因素的影响：1）更新方程级数展开的阶数；2）式中所用旋转角的精度（角速度积分项）。

$$\mathbf{C}_b^R(t_k) = \mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b\times)dt\right)$$

$$\boldsymbol{q}_b^R(t_{k+1}) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{M}^*(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b)dt\right\}\boldsymbol{q}_b^R(t_k)$$

均对角速度向量进行积分（积分周期内认为角速度方向不变）;然而简单地相加增量角（积分运算）来精确地确定旋转角是不可能的。如果角速度向量不能在空间保持固定不变，则需考虑转动的不可交换补偿项。

→ Bortz 方程，等效旋转矢量

$$\mathbf{C}_{b(k)}^i = \mathbf{C}_{b(k-1)}^i\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} = \mathbf{C}_{b(k-1)}^i\left[\mathbf{I} + \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times] + \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$

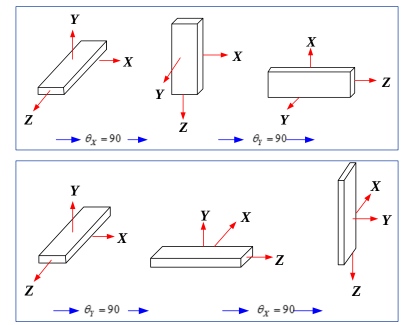
转动的不可交换性

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{b(t_{k-1})b(t_k)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\,dt$$

力学中刚体的有限次转动是不可交换的。转动的不可交换性决定了转动不是矢量，即两次以上的不同轴转动不能相加。对一个空间方向随时间变化的角速度矢量进行积分是无物理意义的。

Case1

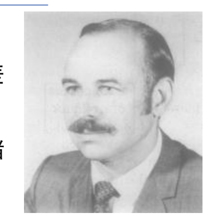
Case2



Ref: Goldstein. Classical Mechanics

John E. Bortz

- 姿态变换表示为旋转矢量
- 分离出了有限旋转中的不可交换误差
- Bortz方程理论严密
- 极大的降低了计算时间和和所需存储空间，精度几乎没有损失



"Before his work in the early 1970s, strapdown was widely considered as something with possible promise "maybe, if only it could ever come out of the lab-&-theory realm" and into operation. Technological capabilities we take for granted today were far less advanced then; among the many state-of-the-art limitations of that time, processing speed is a glaringly obvious example. To make a long story short, John Bortz made it all happen anyway." — ***James Farrell***

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

等效旋转矢量法

$$\mathbf{C}_b^R(t_k)=\mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\left[\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$

- 等效旋转矢量（rotation vector）

  与四元数理论类似：一个坐标系到另一个坐标系的变换可以多次转动来完成（欧拉角法），也通过绕一个定义在参考坐标系中的矢量的单次转动来实现。这个旋转矢量（rotation vector）是一个三元素的向量，旋转矢量的方向给出了转动轴的方向，旋转矢量的模为转动角度的大小，转动符合右手旋转定则。

$$\boldsymbol{q}_{b(t_k)}^{b(t_{k-1})}=\begin{bmatrix}\cos|0.5\boldsymbol{\phi}| \\ \dfrac{\sin|0.5\boldsymbol{\phi}|}{|0.5\boldsymbol{\phi}|}0.5\boldsymbol{\phi}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{b(t_k)}^{b(t_{k-1})}=\mathbf{I}+\frac{\sin|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|}(\boldsymbol{\phi}\times)+\frac{(1-\cos|\boldsymbol{\phi}|)}{|\boldsymbol{\phi}|^2}(\boldsymbol{\phi}\times)(\boldsymbol{\phi}\times)$$

等效旋转矢量法

- 等效旋转矢量微分方程（Bortz方程）

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\left(1-\frac{|\boldsymbol{\phi}|\sin|\boldsymbol{\phi}|}{2(1-\cos|\boldsymbol{\phi}|)}\right)\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$\boldsymbol{\phi}\doteq\boldsymbol{\phi}_{Rb}\qquad\boldsymbol{\omega}\doteq\boldsymbol{\omega}_{Rb}$$

- 化简

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\left[1-\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}\left(\frac{2}{|\boldsymbol{\phi}|}-\frac{1}{3}\cdot\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}-\cdots\right)\right]\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$\approx\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}\approx\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}$$

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}-\cdots$$

等效旋转矢量法

- 微分方程的简化

  当转动角度为小量

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\left(1-\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}\cot\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}\right)\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{|\boldsymbol{\phi}|^2}\left[1-\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}\left(\frac{2}{|\boldsymbol{\phi}|}-\frac{1}{3}\cdot\frac{|\boldsymbol{\phi}|}{2}-\cdots\right)\right]\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$\approx\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})$$

  忽略三阶小量

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}\approx\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}$$

等效旋转矢量法

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}\approx\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}$$

- 旋转矢量微分方程求解

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t_{k\text{-}1})+\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\boldsymbol{\omega}(\tau)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)\right)d\tau$$

  等式右边整体带入积分式内

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\phi}(t_{k\text{-}1})+\Delta\boldsymbol{\theta}(t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}(t_{k\text{-}1})\times\Delta\boldsymbol{\theta}(t)+\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t}\Delta\boldsymbol{\theta}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau$$
$$+\frac{1}{4}\int_{t_{k-1}}^{t}\left(\int_{t_{k-1}}^{\tau}\boldsymbol{\phi}(\tau_1)\times\boldsymbol{\omega}(\tau_1)d\tau_1\right)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau$$

  假设 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 为小量，且 $\boldsymbol{\phi}(t_{k\text{-}1})=\mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\phi}(t)\approx\Delta\boldsymbol{\theta}(t)+\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t}\Delta\boldsymbol{\theta}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau$$

被积函数难以进一步化简，做不同的假设处理：假设$\boldsymbol{\omega}(t)$为时间的常值函数（单子样算法）、线性函数（双子样算法）和二次函数（三子样算法）。

等效旋转矢量法

□ 旋转矢量微分方程双子样解

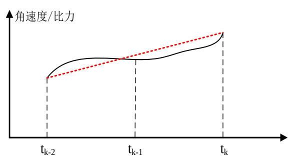
双子样假设：在相邻两个积分周期$[t_{k-2}, t_k]$内，b系相对于R系的旋转角速度向量随时间线性变化。

$$\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t)=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot(t-t_{k-1})$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_k \doteq \Delta\boldsymbol{\theta}(t_k)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t)dt=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot(t-t_{k-1})dt$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1} \doteq \Delta\boldsymbol{\theta}(t_{k-1})=\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}(t)dt=\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot(t-t_{k-1})dt$$

解算系数$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$,带入旋转矢量积分式可得旋转矢量的更新方程为：



$$\boldsymbol{\phi}_{Rb}^{b}(t_k)=\Delta\boldsymbol{\theta}_k+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

二阶圆锥误差补偿项

等效旋转矢量法更新姿态

四元数和DCM的毕卡算法实质上是等效旋转矢量的单子样算法。用等效旋转矢量代替四元数和DCM更新方程中的角增量向量可消除不可交换误差，完成姿态的更新。

$$\mathbf{C}_b^R(t_k)=\mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}\times\right)dt\right)$$

$$\boldsymbol{q}_b^R(t_{k+1})=\left[\exp\{\frac{1}{2}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\boldsymbol{M}^*\left(\boldsymbol{\omega}_{Rb}^{b}\right)dt\}\right]\boldsymbol{q}_b^R(t_k)$$

替换为 $\boldsymbol{\phi}_{Rb}$ 变化量

$$\boldsymbol{q}_b^R(t_k)=\left[\mathbf{I}_{4\times4}\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\Delta\Theta\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}\right]\boldsymbol{q}_b^R(t_{k-1})$$

$$\mathbf{C}_b^R(t_k)=\mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\left[\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$

姿态更新（例）

□ 等效旋转矢量更新姿态

- 将等效旋转矢量带入方向余弦矩阵或四元数更新方程直接更新姿态，默认以同样的速率进行n系和b系的姿态更新

$$\mathbf{C}_b^n(t_k)=\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\exp\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\times\right)dt\right)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}=\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}-\boldsymbol{\omega}_{in}^{b}=\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}-\mathbf{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$$

□ 双速算法

$$\mathbf{C}_{b(k)}^{n(k)}=\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)}\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

低速更新　　快速更新

姿态更新（例）

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{n(k)}=\boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)}\boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

□ 已知量

- $\boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)}$　上一历元的姿态四元数
- $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}$　上一历元的陀螺角增量输出
- $\Delta\boldsymbol{\theta}_{k}$　当前历元的陀螺角增量输出

□ 更新步骤

- 1）等效旋转矢量法更新b系（高频更新）

$$\boldsymbol{\phi}_k=\boldsymbol{\phi}_{b(k-1)b(k)}\approx\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\right]dt=\Delta\boldsymbol{\theta}_k+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}=\begin{bmatrix}\cos 0.5\|\boldsymbol{\phi}_k\|\\ \dfrac{\sin 0.5\|\boldsymbol{\phi}_k\|}{0.5\|\boldsymbol{\phi}_k\|}0.5\boldsymbol{\phi}_k\end{bmatrix}$$

姿态更新（例）

- 2）等效旋转矢量法更新n系（可低频更新）

$$\zeta_k = \zeta_{n(k-1)n(k)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right) dt \approx \left(\boldsymbol{\omega}_{en,k-1/2}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie,k-1/2}^n\right)\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

$$\boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos 0.5\|\zeta_k\| \\ -\dfrac{\sin 0.5\|\zeta_k\|}{0.5\|\zeta_k\|} 0.5\zeta_k \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{1}{8}\|\zeta_k\|^2 \\ -\dfrac{1}{2}\zeta_k \end{bmatrix}$$

- 3）计算当前时刻的姿态四元数

$$\boldsymbol{q}_{b(k)}^{n(k)} = \boldsymbol{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \boldsymbol{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \boldsymbol{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$$

- 4）对更新后的姿态四元数进行归一化处理

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}, \ i = 0,1,2,3$$

*Tips： $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \begin{bmatrix} \omega_e \cos\varphi & 0 & -\omega_e \sin\varphi \end{bmatrix}^T$ $\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \begin{bmatrix} \dfrac{v_E}{R_N + h} & \dfrac{-v_N}{R_M + h} & \dfrac{-v_E \cdot \tan\varphi}{R_N + h} \end{bmatrix}^T$

惯导姿态算法小结

- 使用方向余弦矩阵进行姿态更新时，由于存在误差使得计算的DCM失去了正交矩阵的特性，需进行正交化处理。同理，计算的四元数失去了规范化特性，需进行规范化处理。
- 等效旋转矢量的时间微分运算是相对于哪个坐标系而言？旋转矢量转动的是哪个坐标系，参考的是哪个坐标系？如何表达？如何使用等效旋转矢量进行姿态更新？为什么等效旋转矢量常忽略上标？四元数的上下标如何理解？
- 坐标转换时转动向量与转动坐标系在代数上是等效的

惯导姿态算法小结

- 姿态更新算法比较
  - 欧拉角法：简单明了，概念直观，容易理解，当俯仰角接近90度时方程出现退化现象，所以这种方法只适用于水平姿态变化不大的情况，而不适用于全姿态运载体的姿态确定。
  - 方向余弦法：避免了方程退化的问题，可全姿态工作。但包含了九个未知量的线性微分方程组，计算量大。
  - 四元数法：只需求解四个未知量的线性方程组，计算量比方向余弦法小，且算法简单，易于操作。
  - 旋转矢量法：采用多子样算法，对不可交换误差做有效补偿，算法关系简单，易于操作，并且通过对系数的优化处理使算法漂移在相同子样算法中达到最小，因此特别适用于角机动频繁激烈或存在严重角振动的运载体的姿态更新。

惯导速度算法

- 地速微分方程
  - 惯性坐标系下地速微分方程
  - 地球坐标系下地速微分方程
  - 导航坐标系下地速微分方程
- 速度更新
  - 以导航坐标系地速更新为例

速度微分方程

上下标定义规定

*从哪个坐标系观察

* 投影到某坐标系

□ 关心的是地速 $\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e = \boldsymbol{v}_e$

□ 哥氏方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

□ 导航方程 $\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

□ 地速在不同系下变化(时间导数)不同；可以在不同的坐标系下建立地速微分方程，*i* 系，*e*系，*n*系。

惯性坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e = \boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

$\left.\frac{d\boldsymbol{\omega}_{ie}}{dt}\right|_i = \boldsymbol{0}$

1）由哥氏方程和地速定义 $\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r}$

2）在i系下求导 $\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i = \left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i + \left.\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r}\right)\right|_i$

3）整理得：

(* 重力定义！)

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \left(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{r}\right)\right)$$
$$= \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l$$

4）投影到 *i* 系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i^i = \boldsymbol{f}^i - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i\times\boldsymbol{v}_e^i + \boldsymbol{g}_l^i$$
$$= \mathbf{C}_b^i\boldsymbol{f}^b - \boldsymbol{\omega}_{ie}^i\times\boldsymbol{v}_e^i + \boldsymbol{g}_l^i$$

已知量？未知量？

地球坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_e$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e = \boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

1）对地速用哥氏方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_e + \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e$

2）对比 i 系的机械编排 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l$

3）整理得： $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_e = \boldsymbol{f} - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l$

4）投影到 e 系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_e^e = \boldsymbol{f}^e - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\times\boldsymbol{v}_e^e + \boldsymbol{g}_l^e$$
$$= \mathbf{C}_b^e\boldsymbol{f}^b - 2\boldsymbol{\omega}_{ie}^e\times\boldsymbol{v}_e^e + \boldsymbol{g}_l^e$$

已知量？未知量？

导航坐标系速度微分方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_n$

*Tips

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_e = \boldsymbol{v}_e$

$\left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_a = \left.\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|_b + \boldsymbol{\omega}_{ab}\times\boldsymbol{r}$

$\left.\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|_i = \boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$

$\boldsymbol{\omega}_{in} = \boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}$

1）对地速用哥氏方程 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i = \left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_n + \boldsymbol{\omega}_{in}\times\boldsymbol{v}_e$

2）对比 i 系的机械编排 $\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_i = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l$

3）整理得：

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_n = \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\omega}_{ie}\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l - \boldsymbol{\omega}_{in}\times\boldsymbol{v}_e$$
$$= \boldsymbol{f} - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{en}\right)\times\boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{g}_l$$

4）投影到 n 系

$$\left.\frac{d\boldsymbol{v}_e}{dt}\right|_n^n = \boldsymbol{f}^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\boldsymbol{v}_e^n + \boldsymbol{g}_l^n$$
$$= \mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\boldsymbol{v}_e^n + \boldsymbol{g}_l^n$$

已知量？未知量？

速度微分方程

惯性导航从根本上说就是已知来自于加速度计的比力（非引力加速度）测量值在特定的坐标系内（比力测量值投影在该坐标系内，且这个坐标系相对于惯性坐标系的指向通过陀螺确定）求解牛顿力学方程。对于地球附近的导航应用来说，有

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_R = \mathbf{f} - \left(\boldsymbol{\omega}_{ie} + \boldsymbol{\omega}_{iR}\right)\times \mathbf{v}_e + \mathbf{g}_l$$

R = 任意坐标系，如i系，n系，e系

$\mathbf{v}_e$ = 地速

$\boldsymbol{\omega}_{ie}$ = 地球自转角速度

$\boldsymbol{\omega}_{iR}$ = R系相对于惯性坐标系的旋转角速度

$\mathbf{g}_l$ = 地球重力加速度

$\mathbf{f}$ = 比力

惯导更新算法（离散化）

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$

- 目标：
  - 求解微分方程→差分方程（以进行实际解算）

＊ 离散化不能损失系统精度！

- 已知：
  - 上一步的导航状态
  - 惯导器件的测量值（增量输出）

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)\,dt$$

$$\Delta\mathbf{v}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b(t)\,dt$$

- 注意：
  - 从 t_{k-1} 到 t_k，姿态和速度都变了；
  - 从 t_{k-1} 到 t_k 的过程中，角速度和加速度也在变

速度更新算法 – 直观猜想

- 求解地速微分方程

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$

$$\mathbf{v}^n(t_k) \approx \mathbf{v}^n(t_{k-1}) + \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b\cdot\Delta t + \left(\mathbf{g}_l^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}_e^n\right)\cdot\Delta t$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b\cdot\Delta t &\approx \frac{\mathbf{C}_b^n(t_k)+\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})}{2}\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k)\\
&= \mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k) + \frac{\mathbf{C}_b^n(t_k)-\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})}{2}\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k)\\
&\approx \mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k) + \frac{\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\cdot\left[\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k)\times\right]}{2}\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k)\\
&= \mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\cdot\Delta\mathbf{v}(t_k) + \frac{1}{2}\mathbf{C}_b^n(t_{k-1})\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k)\times\Delta\mathbf{v}(t_k)\ \mathbf{+?}
\end{aligned}$$

速度更新算法

速度更新是指根据速度微分方程，推导当前时刻速度与前一时刻速度之间的递推关系。以n系下的速度更新为例

- 已知(n系下的地速微分方程)：

$$\left.\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\right|_n^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}_l^n$$

对上式进行时间积分可得：

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta\mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n$$

$$\begin{cases}
\mathbf{v}_{k-1}^n & \text{（积分初值）}\\
\Delta\mathbf{v}_{f,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_b^n\mathbf{f}^b dt & \text{（比力积分项）}\\
\Delta\mathbf{v}_{g/cor,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\mathbf{g}_l^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\mathbf{v}_e^n\right]dt & \text{（重力/哥氏积分项）}
\end{cases}$$

速度更新算法

□ 重力/哥氏积分项

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

■ 简化处理

积分周期内，被积函数数值随时间变化缓慢；计算所需的位置和速度均采用初始时刻或中间时刻的位置和速度。

$$\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n = \left\{\left[\boldsymbol{g}_l^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\boldsymbol{v}_e^n\right]_{t_{k-1/2}}\right\}\cdot\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

Tips:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\Big|_{t_{k-1/2}} = \begin{bmatrix}\omega_e\cos\varphi_{k-1/2}\\ 0\\ -\omega_e\sin\varphi_{k-1/2}\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega}_{en}^n\Big|_{t_{k-1/2}} = \begin{bmatrix}\dfrac{v_E}{R_N+h} & \dfrac{-v_N}{R_M+h} & \dfrac{-v_E\tan\varphi}{R_N+h}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

R_M = 子午圈曲率半径， R_N = 卯酉圈曲率半径

速度更新算法

□ 比力积分项

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_b^n\boldsymbol{f}^b dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\underbrace{\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}}_{\text{缓变项}}\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\underbrace{\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}}_{\text{快速变化项}}\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

n系变换矩阵简化处理

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k-1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)$$

带入比力积分项中可得：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n &= \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(t)}\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt\end{aligned}$$

速度更新算法

□ 比力积分项（续）

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt$

相邻两历元的n系之间相对姿态矩阵在小角度假设情况下取至一阶近似（详见姿态更新）：

$$\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} \approx \mathbf{I} - \left(\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times\right)$$

$\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}$ 表示 t_{k-1}时刻的n系转动到与 t_k时刻n系所对应的等效旋转矢量：

$$\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\boldsymbol{\omega}_{en}^n + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n\right)dt \approx \left[\boldsymbol{\omega}_{en}^n\left(t_{k-1/2}\right) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n\left(t_{k-1/2}\right)\right]\left(t_k - t_{k-1}\right)$$

比力积分项可整理成：

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}\right)\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt\\ &= \left[\mathbf{I} - \left(0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt\end{aligned}$$

难点：b系比力积分项

速度更新算法

□ 比力积分项（续）

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \left(0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)}$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

将 $\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)}$ 写成等效旋转矢量的函数：

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} = \mathbf{I} + \frac{\sin|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos|\boldsymbol{\phi}|}{|\boldsymbol{\phi}|^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2, \quad t\in\left[t_{k-1}, \quad t_k\right]$$

$\boldsymbol{\phi}$表示t_{k-1} 时刻的b系转动到与t时刻的b系所对应的等效旋转矢量

积分周期内的小角度假设，忽略式中的二阶小量

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \approx \mathbf{I} + (\boldsymbol{\phi}\times), \quad t\in\left[t_{k-1}, \quad t_k\right]$$

Tips: $\mathbf{C}_b^R = \left[\mathbf{I} + \dfrac{\sin|\boldsymbol{\phi}_{Rb}|}{|\boldsymbol{\phi}_{Rb}|}(\boldsymbol{\phi}_{Rb}\times) + \dfrac{1-\cos|\boldsymbol{\phi}_{Rb}|}{|\boldsymbol{\phi}_{Rb}|^2}(\boldsymbol{\phi}_{Rb}\times)^2\right]$

速度更新算法

□ 比力积分项（续）

overview $\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$

$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \left(0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)}$

在更新周期内b系变换的三个欧拉角可作小角度假设，则等效旋转矢量$\boldsymbol{\phi}$可写作（详见姿态更新）：

$$\boldsymbol{\phi} \doteq \boldsymbol{\phi}_{b(k-1)b(t)} \approx \Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_{t_{k-1}}^{t} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b(\tau)d\tau$$

陀螺输出角增量

将上述表达式带入b系比力积分项，得：

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\mathbf{I} + \left(\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\right)\right]\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t)dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

Sculling & Velocity Rotation Term

被积函数难以进一步化简，只能作不同的假设处理：假设积分周期内加速度计所测比力和陀螺所测加速度向量为时间的常值函数（单子样算法）、线性函数（双子样算法）和二次函数（三子样算法）

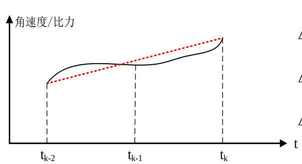
速度更新算法

□ 速度更新双子样算法

双子样假设：在$[t_{k-2}, t_k]$时段内角速度观测量和比力观测量均随时间线性变化。在两个采样区间内，将实际的角速度和比力（黑色曲线）近似为随时间线性变化（曲线简化为直线，红色虚线，黑色曲线下的积分面积为惯性传感器实际输出的角增量或速度增量）

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}(t - t_{k-1}),\quad \boldsymbol{f}^b(t) = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}(t - t_{k-1})$$

已知各时刻陀螺和加表的输出



$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot(t - t_{k-1})dt$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t_{k-1}) = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\cdot(t - t_{k-1})dt$$

$$\Delta\boldsymbol{v}(t_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t)dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}\cdot(t - t_{k-1})dt$$

$$\Delta\boldsymbol{v}(t_{k-1}) = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{f}^b(t)dt = \int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}\cdot(t - t_{k-1})dt$$

求出系数***a, b, c, d***

速度更新算法

□ 速度更新双子样算法

- 将解算系数带入b系比力积分项中，得

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{f}^b(t) + \Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{f}^b(t)dt$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\boldsymbol{v}_k + \underbrace{\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{v}_k}_{\text{Rotation Compensation Term}} + \underbrace{\frac{1}{12}\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{v}_k + \Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k\right)}_{\text{Sculling Compensation Term}}$$

讨论：什么情况下Sculling补偿项为零？

→ 速度更新算法总结

速度更新算法

□ 速度更新算法总结

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}_k^n = \boldsymbol{v}_{k-1}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n \\ \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n = \left\{\left[\boldsymbol{g}_l^n - \left(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n\right)\times\boldsymbol{v}_e^n\right]_{t_{k-1/2}}\right\}\cdot\left(t_k - t_{k-1}\right) \\ \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^n = \left[\mathbf{I} - \left(0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1,k}\times\right)\right]\mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)}\Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} \\ \boldsymbol{\zeta}_{k-1,k} = \left[\boldsymbol{\omega}_{en}^n\left(t_{k-1/2}\right) + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n\left(t_{k-1/2}\right)\right]\left(t_k - t_{k-1}\right) \\ \Delta\boldsymbol{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{v}_k + \frac{1}{12}\left(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{v}_k + \Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k\right)\end{cases}$$

位置更新算法

- 以大地坐标表示位置：（在LLF中）

$$\dot{\mathbf{r}}^n=\begin{pmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\lambda}\\ \dot{h}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{R_M+h} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{(R_N+h)\cos\varphi} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_N\\ v_E\\ v_D\end{pmatrix}=\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}^n$$

- 更新高程
  - 简化：积分周期内v_D简化随时间线性变化

$$h(t_k)=h(t_{k-1})-\int_{t_{k-1}}^{t_k}v_D(t)dt$$

$$h(t_k)=h(t_{k-1})-\frac{1}{2}\left(v_D(t_k)+v_D(t_{k-1})\right)(t_k-t_{k-1})$$

位置更新算法

- 纬度更新

Tips: $\dot{\varphi}=\frac{v_N}{R_M+h}$，$\dot{\lambda}=\frac{v_E}{(R_N+h)\cos\varphi}$

  - 积分周期内可忽略R_M 随纬度（和时间）的变化，简化为常值。高程h在积分周期内简化为常值（积分周期内的平均高程）

$$\varphi(t_k)=\varphi(t_{k-1})+\frac{1}{2}\frac{v_N(t_k)+v_N(t_{k-1})}{R_M(\varphi(t_{k-1}))+\bar{h}}(t_k-t_{k-1})$$

- 经度更新

$$\lambda(t_k)=\lambda(t_{k-1})+\frac{1}{2}\frac{v_E(t_k)+v_E(t_{k-1})}{\left(R_N(\bar{\varphi})+\bar{h}\right)\cos(\bar{\varphi})}(t_k-t_{k-1})$$

$$\bar{h}=\frac{1}{2}\left(h(t_k)+h(t_{k-1})\right),\quad \bar{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\varphi(t_k)+\varphi(t_{k-1})\right)$$

惯性导航算法总结

- 导航状态的时间传递
  - 主要研究姿态、速度、位置的微分方程（连续时间）。注意区分是从哪个坐标系中观察的，这与投影到哪个坐标系不同
- 惯导更新算法
  - 主要研究的是姿态、速度、位置的微分方程做离散化时的问题
  - 更新算法应保证算法误差远小于惯性传感器带来的误差。系统设计时要针对被测载体的动态水平，平衡好数据更新率和更新算法的精度
  - 实用的位置更新算法推导复杂，但思路和速度更新算法类似

INS程序实现注意事项

- 整理INS算法文档
  - 加深理解；方便程序调试及查错；明确程序结构；简化
- 椭球模型及常用的常数
  - 地球椭球模型；正常重力计算；w_ie等
- 验证独立小函数的正确性
  - 验证DCM，四元数，欧拉角，旋转矢量之间转换函数的正确性（参考附录）；注意坐标系的选择
  - 向量的各类运算
- 计算过程中统一使用国际单位
  - 如经纬度（rad），姿态（rad）；输出时可转换单位
- 速度、位置和姿态的更新顺序；最新更新的导航状态（如速度）需要用到其它两状态的外推值（如何外推）；如何判断结果的正确性？