附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of Euler Angles
  - 欧拉角序列

$$\mathrm{EulerAngles} = \begin{bmatrix} \phi_{nb} \\ \theta_{nb} \\ \psi_{nb} \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

$s = \sin;\ c = \cos$

附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of quaternion
  - 四元数

$$\boldsymbol{q}_b^n = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- DCM in terms of rotation vector
  - 旋转矢量

$$\boldsymbol{\phi}_{nb} = \begin{bmatrix} \phi_{nb,x} \\ \phi_{nb,y} \\ \phi_{nb,z} \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\mathbf{C}_b^n = \left[\mathbf{I} + \frac{\sin\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}{\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times) + \frac{\left(1-\cos\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|\right)}{\|\boldsymbol{\phi}_{nb}\|^2}(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times)(\boldsymbol{\phi}_{nb}\times) \right]$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Quaternion in terms of Euler Angles
  - 欧拉角序列

$$\mathrm{EulerAngles} = \begin{bmatrix} \phi_{nb} \\ \theta_{nb} \\ \psi_{nb} \end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\boldsymbol{q}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Quaternion in terms of Rotation vector
  - 旋转矢量

$$\boldsymbol{\phi}_{nb}=\begin{bmatrix}\phi_{nb,x}\\ \phi_{nb,y}\\ \phi_{nb,z}\end{bmatrix}$$

  - 转换式

$$\boldsymbol{q}_b^n=\begin{bmatrix}\cos\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\| \\ \dfrac{\sin\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}{\|0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\|}0.5\boldsymbol{\phi}_{nb}\end{bmatrix}$$

附录1：姿态表达式的相互转换

- Euler Angles in terms of DCM
  - DCM

$$\mathbf{C}_b^n=\begin{pmatrix} c\theta c\psi & -c\phi s\psi+s\phi s\theta c\psi & s\phi s\psi+c\phi s\theta c\psi \\ c\theta s\psi & c\phi c\psi+s\phi s\theta s\psi & -s\phi c\psi+c\phi s\theta s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix}$$

  - 转换式

$$\phi_{nb}=\tan^{-1}\frac{C_{32}}{C_{33}}\quad(-\pi<\phi\le\pi)$$

$$\theta_{nb}=\tan^{-1}\frac{-C_{31}}{\sqrt{C_{32}^2+C_{33}^2}}\quad(-\pi/2\le\theta\le\pi/2)$$

$$\psi_{nb}=\tan^{-1}\frac{C_{21}}{C_{11}}\quad(-\pi<\alpha\le\pi)$$

附录1：姿态四元数的归一化

- 姿态四元数的归一化

$$\boldsymbol{q}_i=\frac{\hat{\boldsymbol{q}}_i}{\sqrt{\hat{\boldsymbol{q}}_0^2+\hat{\boldsymbol{q}}_1^2+\hat{\boldsymbol{q}}_2^2+\hat{\boldsymbol{q}}_3^2}},\quad i=0,1,2,3$$

附录2：大地测量基础知识

- 地球椭球基本参数

地球椭球是选择的旋转椭球,旋转椭球的形状和大小常用子午椭圆的五个基本几何参数(或称元素)，通常用长半轴和扁率两个参数来定义即可。

  - 长半轴 a
  - 短半轴 b
  - 椭球扁率 f
  - 椭球第一偏心率 e
  - 椭球第二偏心率 e'

$$f=\frac{a-b}{a}$$

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$e'=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$$

- WGS84椭球参数
  - 长半轴 a = 6378137.0 m；
  - 短半轴b = 6356752.3142m；
  - 扁率f = 1/298.257223563；
  - 地球自转角速度 ω = 7.292115×10^{-5} rad/s；
  - 第一偏心率平方(e^2) = 0.00669437999013；
  - 第二偏心率平方(e'^2) = 0.006739496742227；
  - 地球引力常数（含大气层）
    GM = 3.986004418×10^{14} m^3/s^2；
  - 椭球正常重力位$U0$ = 62636860.8497 m^2/s^2；
  - 赤道正常重力 = 9.7803267714m/s^2；
  - 引力位二阶谐系数 = -484.16685×10^{-6}；

- 2000国家大地坐标系椭球参数(CGCS2000)
  - 长半轴a = 6378137m；
  - 扁率f = 1/298.257222101 ；
  - 地球自转角速度ω = 7.292115×10^{-5}rad/s；
  - 地球引力常数GM = 3.986004418×10^{14}m^3/s^2
- GRS80椭球参数
  - 长半轴 a = 6378137m
  - 短半轴 b = 6356752.3141m
  - 地球自转角速度ω = 7.292115×10^{-5}rad/s
  - 地球引力常数GM = 3.986005×10^{14}m^3/s^2

- 地球椭球面上的几种曲率半径
  - 子午圈曲率半径（主曲率半径）

$$R_M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

  - 卯酉圈曲率半径

$$R_N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

- 地球附近一点的正常重力按下式计算

$$\gamma(h,\varphi) = \gamma(\varphi)\left(1-\frac{2}{a}\left(1+f+m-2f\sin^2\varphi\right)h+\frac{3}{a^2}h^2\right)$$

$$\gamma(\varphi) = \frac{a\gamma_a\cos^2\varphi + b\gamma_b\sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}, \quad m = \frac{\omega_e^2 a^2 b}{GM}$$

φ 为纬度；h为大地高；a为地球椭球长半轴长度；b为短半轴长度；f为地球扁率；w_e为地球自转角速度；GM为地球引力常数；γ_a，γ_b 分别为赤道和极点处的重力值。对于GRS80椭球有

$$\begin{aligned} a &= 6378137.0\ m & GM &= 3.986005\times10^{14}\ m^3/s^2 \\ b &= 6356752.3141\ m & \gamma_a &= 9.7803267715\ \ m/s^2 \\ \omega_e &= 7.292115\times10^{-5}\ rad/s & \gamma_a &= 9.8321863685\ \ m/s^2 \\ f &= 1/298.257222101 & & \end{aligned}$$

Ref: Jekeli C. Inertial navigation systems with geodetic applications[M]. Walter de Gruyter, 2001.186-189.

附录3：位置误差方程推导（方法1）

- 载体在任意时刻 t 的位置可通过积分运算得到：

$$\mathbf{r}^e(t)=\mathbf{r}^e(t_0)+\int_0^t \mathbf{C}_n^e(\tau)\mathbf{v}^n(\tau)d\tau$$

- 载体的实际位置表达式为：

$$\hat{\mathbf{r}}^e(t)=\hat{\mathbf{r}}^e(t_0)+\int_0^t \mathbf{C}_{\hat{n}}^e(\tau)\hat{\mathbf{v}}^n(\tau)d\tau$$

- 误差扰动，得

$$\mathbf{r}^e+\delta\mathbf{r}^e=\mathbf{r}^e(t_0)+\delta\mathbf{r}^e(t_0)+\int_0^t \mathbf{C}_n^e\left[\mathbf{I}+(\delta\boldsymbol{\theta}\times)\right](\mathbf{v}^n+\delta\mathbf{v}^n)d\tau$$

$$\delta\mathbf{r}^e=\delta\mathbf{r}^e(t_0)+\int_0^t \mathbf{C}_n^e\delta\mathbf{v}^n+\mathbf{C}_n^e(\delta\boldsymbol{\theta}\times)\mathbf{v}^n\,d\tau$$

*Tips: $\delta\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\frac{\delta r_E}{R_N+h} & -\frac{\delta r_N}{R_M+h} & -\frac{\delta r_E\tan\varphi}{R_N+h}\end{bmatrix}^T$

附录3：位置误差方程推导（方法1）

$$\delta\mathbf{r}^n=\mathbf{C}_e^n\delta\mathbf{r}^e$$

- 对等式两边求导，得位置误差微分方程为：

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{r}}^n&=\frac{d\left(\mathbf{C}_e^n\delta\mathbf{r}^e\right)}{dt}=\dot{\mathbf{C}}_e^n\delta\mathbf{r}^e+\mathbf{C}_e^n\frac{d\left(\delta\mathbf{r}^e\right)}{dt}\\&=\mathbf{C}_e^n\left(-\boldsymbol{\omega}_{en}^e\times\right)\mathbf{C}_n^e\delta\mathbf{r}^n+\mathbf{C}_e^n\left(\mathbf{C}_n^e(\delta\boldsymbol{\theta}\times)\mathbf{v}^n+\mathbf{C}_n^e\delta\mathbf{v}^n\right)\\&=-\boldsymbol{\omega}_{en}^n\times\delta\mathbf{r}^n+\delta\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{v}^n+\delta\mathbf{v}^n\end{aligned}$$

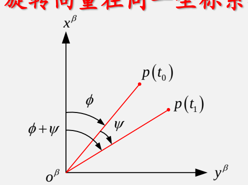
*Tips: $\delta\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\frac{\delta r_E}{R_N+h} & -\frac{\delta r_N}{R_M+h} & -\frac{\delta r_E\tan\varphi}{R_N+h}\end{bmatrix}^T$

附录4

Ref: Paul Groves, Principles of GNSS, Inertial, and multisensor Integrated Naivgatioin system (second edition)

- 物体相对于投影轴系的旋转，与投影轴系相对于物体的等角反向旋转是等价的

旋转向量在同一坐标系投影

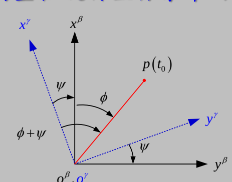


$$\begin{cases}x_{\beta\alpha}^\beta(t_0)=r_{\beta\alpha}\cos\phi\\ y_{\beta\alpha}^\beta(t_0)=r_{\beta\alpha}\sin\phi\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{\beta\alpha}^\beta(t_1)=r_{\beta\alpha}\cos(\phi+\psi)\\ y_{\beta\alpha}^\beta(t_1)=r_{\beta\alpha}\sin(\phi+\psi)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x_{\beta\alpha}^\beta(t_1)\\ y_{\beta\alpha}^\beta(t_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\beta\alpha}^\beta(t_0)\\ y_{\beta\alpha}^\beta(t_0)\end{bmatrix}$$

向量在旋转坐标系中的投影



$$\begin{cases}x_{\beta\alpha}^\gamma(t_0)=r_{\beta\alpha}\cos(\phi+\psi)\\ y_{\beta\alpha}^\gamma(t_0)=r_{\beta\alpha}\sin(\phi+\psi)\end{cases}$$

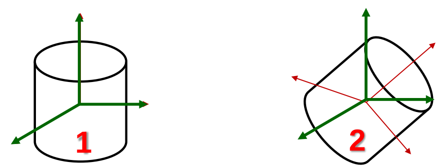
$$\begin{bmatrix}x_{\beta\alpha}^\gamma(t_0)\\ y_{\beta\alpha}^\gamma(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi\\ \sin\psi & \cos\psi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{\beta\alpha}^\beta(t_0)\\ y_{\beta\alpha}^\beta(t_0)\end{bmatrix}$$

附录 5 姿态复习

- 什么是姿态？
- 姿态解算在整个惯性导航算法中占什么地位？有什么用？
- 姿态如何表示？
- 姿态如何递推？
- 姿态更新如何在计算机上解算？（已知什么，要得到什么？目标是什么？求解微分方程，离散化）

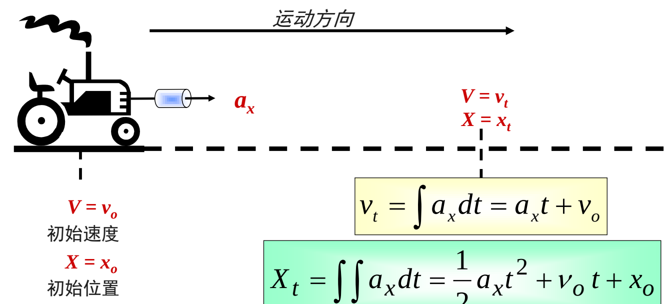
姿态

- “正”与“斜”---参考系
- 如何描述三维空间内的刚体？位形
- 坐标系与刚体固联



惯性导航– 1D

$$\boxed{\Delta\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t_o)=v_o t+\int_{t_o}^{t}\int\mathbf{a}(t)dtdt}$$

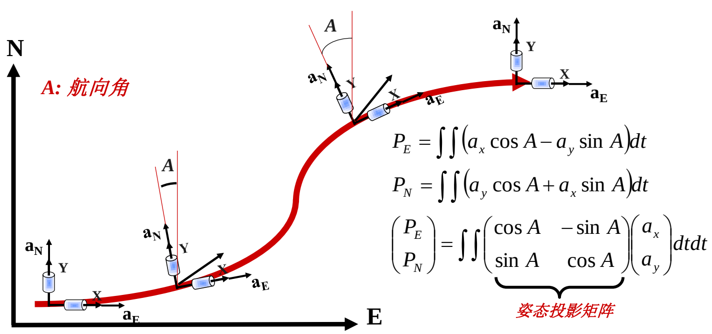


$$v_t=\int a_x dt=a_x t+v_o$$

$$X_t=\int\int a_x dt=\frac{1}{2}a_x t^2+v_o t+x_o$$

惯性导航-2D

- 数学平台

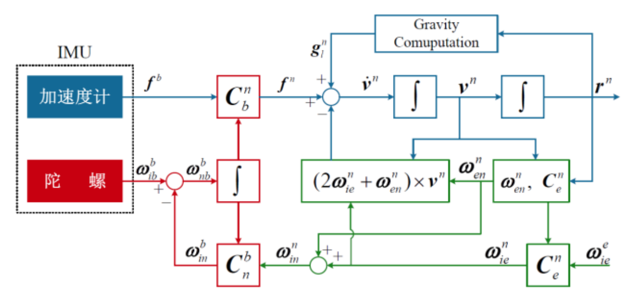


$$P_E=\int\int\left(a_x\cos A-a_y\sin A\right)dt$$

$$P_N=\int\int\left(a_y\cos A+a_x\sin A\right)dt$$

$$\begin{pmatrix}P_E\\P_N\end{pmatrix}=\int\int\underbrace{\begin{pmatrix}\cos A & -\sin A\\ \sin A & \cos A\end{pmatrix}}_{\text{姿态投影矩阵}}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}dtdt$$

惯性导航-3D



姿态如何表示（表达式）

- 欧拉角
  - **例如：歪了多少度。3D呢？更直观**
- 方向余弦矩阵
  - **同一个向量在这两个刚体的视角内如何表示，及其相互转换关系；更重数学表示**
- 四元数，等效旋转矢量
  - **如何将刚体从形位1转动到形位2；更重物理意义**

姿态如何递推（更新）

- 姿态如何变化
  - 姿态微分方程

$$\dot{\mathbf{C}}_b^R(t)=\mathbf{C}_b^R(t)\left[\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\times\right] \quad ,\mathbf{C}_b^R(t_0)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_b^R(t)=\frac{1}{2}\mathbf{q}_b^R(t)\otimes\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}_{Rb}^b(t)\end{bmatrix} \quad ,\mathbf{q}_b^R(t_0)$$

- 姿态如何在计算机上完成更新
  - 例：选择i系为R系
  - 已知条件是什么？
  - 姿态更新的目标是什么？

$$\mathbf{C}_b^R=\mathbf{C}_i^R\mathbf{C}_b^i \qquad \Delta\boldsymbol{\theta}^b(t_k)=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)dt \qquad \mathbf{C}_b^R(t_0)$$

姿态更新算法

- 姿态更新算法
  - 姿态微分方程求解，离散化
  - Bortz之前的算法：数值积分
  - Bortz之前的姿态算法的问题在哪

$$\mathbf{C}_b^R(t_k)=\mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\left[\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$

- Bortz的姿态算法

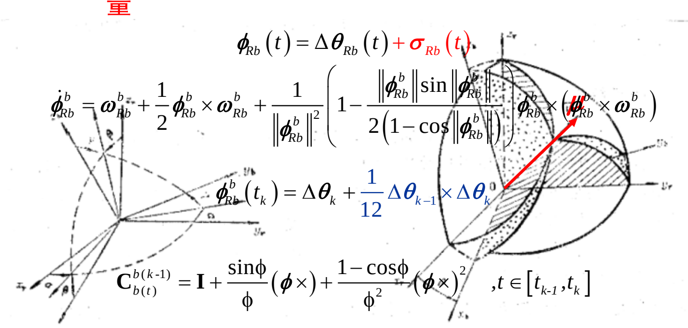
$$\mathbf{q}_b^R(t_{k+1})=\left[\mathbf{I}_{4\times4}\cos\frac{\Delta\theta}{2}+\Delta\Theta\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}\right]\mathbf{q}_b^R(t_k)$$

  - 解决了什么问题？
    - 不可交换误差
  - 怎么实现的？
  - 什么是Bortz方程

Bortz方程

$$\mathbf{C}_b^R(t_k)=\mathbf{C}_b^R(t_{k-1})\left[\mathbf{I}+\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]+\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta^2}[\Delta\boldsymbol{\theta}\times]^2\right]$$

- 等效旋转矢量
  - 如何用陀螺输出的角增量来构造等效的旋转矢量



$$\boldsymbol{\phi}_{Rb}(t)=\Delta\boldsymbol{\theta}_{Rb}(t)+\boldsymbol{\sigma}_{Rb}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_{Rb}^b=\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b+\frac{1}{\left\|\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\right\|^2}\left(1-\frac{\left\|\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\right\|\sin\left\|\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\right\|}{2\left(1-\cos\left\|\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\right\|\right)}\right)\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\times\left(\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b\times\boldsymbol{\omega}_{Rb}^b\right)$$

$$\boldsymbol{\phi}_{Rb}^b(t_k)=\Delta\boldsymbol{\theta}_k+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k$$

$$\mathbf{C}_{b(t)}^{b(k\text{-}1)}=\mathbf{I}+\frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times)+\frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2 \quad ,t\in[t_{k-1},t_k]$$

陀螺输出

- 为何不可交换误差不直接从原始输出里面扣除？直接输出等效的旋转矢量？
- 惯性导航原理与误差，如何理解惯导误差随时间发散
- 纯惯导作业中与参考结果的差异是否INS的累计误差？

静基座惯导误差特性分析

- 误差微分方程简化

  - 运动速度为0
  - 真实位置准确已知
  - 曲率半径Rm，Rn = R
  - 通道之间误差解耦

$$\delta\dot{v}_N = -\left(\frac{2v_E\omega_e\cos\varphi}{R_M+h} + \frac{v_E^2\sec^2\varphi}{(R_M+h)(R_N+h)}\right)\delta r_N + \left(\frac{v_N v_D}{(R_M+h)^2} - \frac{v_E^2\tan\varphi}{(R_N+h)^2}\right)\delta r_D$$
$$+\frac{v_D}{R_M+h}\delta v_N - 2\left(\omega_e\sin\varphi + \frac{v_E\tan\varphi}{R_N+h}\right)\delta v_E + \frac{v_N}{R_M+h}\delta v_D - f_D\phi_{pitch} + f_E\phi_{yaw} + \delta f_N$$

$$\delta\dot{r}_N = \delta v_N$$
$$\delta\dot{v}_N = -f_D\phi_{pitch} + \delta f_N$$
$$\dot{\phi}_{pitch} = -\delta v_N / R - \delta\omega_{ib,E}^n$$

附录：欧拉角微分方程

- 推导

$$\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix} = \mathbf{C}_\phi\mathbf{C}_\theta\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + \mathbf{C}_\phi\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta\\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix}$$

附录：欧拉角微分方程

- 推导

$$\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix} = \mathbf{C}_\phi\mathbf{C}_\theta\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} + \mathbf{C}_\phi\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\phi}\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -\sin\theta\\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta\\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix}$$

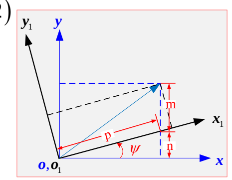
$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta\\ 0 & \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi\cos\theta\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{nb,x}^b\\ \omega_{nb,y}^b\\ \omega_{nb,z}^b\end{bmatrix}$$

附录：坐标变换-几何法

任意向量 $\boldsymbol{r}$ 在坐标系 $b(\boldsymbol{oxy})$ 和 $b_1(\boldsymbol{o}_1\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1)$下的投影（即坐标值）表示为 $\boldsymbol{r}^b=[x,\quad y]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{r}^{b_1}=[x_1,\quad y_1]^{\mathrm{T}}$

$$x=p\cos\psi,\quad y=n+m=p\sin\psi+m \qquad (1)$$

$$x_1=p+m\sin\psi,\quad y_1=m\cos\psi \qquad (2)$$



根据(1)式，有

$$p=\frac{x}{\cos\psi},\quad m=y-\frac{x}{\cos\psi}\sin\psi$$

带入(2)式，得

$$x_1=\frac{x}{\cos\psi}+\left(y-\frac{x}{\cos\psi}\sin\psi\right)\sin\psi,\quad y_1=\left(y-\frac{x}{\cos\psi}\sin\psi\right)\cos\psi$$

$$x_1=y\sin\psi+x\cos\psi,\quad y_1=y\cos\psi-x\sin\psi$$